

基于记忆依赖型导数的岩石黏弹塑性蠕变模型

A Viscoelastic-plastic Creep Model of Rocks Based on Memory-dependent Derivative

程艳晨¹, 孙林娜¹, 张黎明¹, 王在泉², 文金浩¹

(1. 青岛理工大学土木工程学院, 山东 青岛 266520; 2. 青岛理工大学理学院, 山东 青岛 266520)

摘要:为准确表征岩石非线性加速蠕变阶段特性,本文基于记忆依赖型导数理论,构建一个能反映岩石黏弹塑性特性的非线性蠕变模型。将记忆依赖型黏壶、胡克体、塑性元件与记忆依赖型黏壶并联组成的非线性黏塑性体串联,建立了一个新的岩石非线性黏弹塑性蠕变模型,并将其推广到三维空间。应力水平较低时,胡克体和记忆依赖型黏壶可有效描述岩石的瞬时应变和等速应变特征;当应力水平超过岩石的长期强度时,非线性黏塑性体可准确反映岩石的非线性加速蠕变特征。采用页岩、绿片岩和黏土的蠕变数据对比记忆依赖型蠕变模型、分数阶蠕变模型和黏弹塑性蠕变模型的准确度,发现本文模型刻画岩土体蠕变变形的拟合度优于其他模型,尤其在表征岩土体非线性蠕变特征方面更具优势。

关键词:岩石;蠕变;记忆依赖型导数;本构模型

中图分类号: TD313 **文献标志码:** A **文章编号:** 1672-609X(2025)02-0042-06

Abstract: To accurately investigate characteristics of rocks in the non-linear accelerated creep stage, a novel non-linear viscoelastic-plastic creep model of rocks was established based on the memory-dependent derivative (MDD) theory and generalized to the three-dimensional (3D) space. The model was established by connecting the memory-dependent (M-D) dashpot, Hooke solid, and non-linear viscoplastic body formed by parallel connection of the plastic element and M-D dashpot in series. Under low stress, the Hooke solid and M-D dashpot can describe both the instantaneous and isokinetic creep characteristics of rock; when the stress exceeds the long-term strength of the rock, the non-linear viscoplastic body can manifest the non-linear accelerated creep characteristics of rocks. Creep data pertaining to shale, greenschist, and clay were used to compare the accuracy of the M-D creep model, fractional creep model, and viscoelastic-plastic creep model. The results show that the goodness-of-fit of the proposed model is better than other models in expounding creep deformation of rock and soil mass, with a particular advantage in characterizing non-linear creep of a rock and soil mass.

Key words: rock; creep; M-D derivative; constitutive model

1 前言

深部岩体的变形特征具有时间依赖性,浅部低应力状态下的硬脆性岩石,深部高应力状态下可能会出现大变形、难支护的力学特性,呈现显著的蠕变特性^[1-2]。中国每年由于岩石围岩蠕变导致支护失效的巷道达数万米,增加十亿元支护成本^[2];近十年煤矿巷道因煤岩体的蠕变效应,翻修量占整个巷道掘进

量的40%,支护成本增加了1.4倍^[3]。因此,明确岩体的蠕变特性、构建准确描述岩体蠕变特征的本构模型对于预防深部岩体蠕变破坏意义重大。

蠕变模型是刻画岩石蠕变特性的主要方法。岩石蠕变模型分为经验模型^[4]、组合元件模型^[5]、非线性蠕变模型^[6]。经验模型拟合参数少,方便求解,但只能反映岩石蠕变的线性特征^[7]。姚兆明等^[8]通过描述黏土在不同应力水平下,其应变与时间取对数具有线性关系的特征,引入参数少且易于确定的经验模型。因此,学者采用传统元件串联、并联构成的组合模型描述岩体蠕变特征。李萌等^[3]在 Burgers 模型上串联弹性元件和黏性元件,构建了改进的黏弹塑性蠕变模型描述灰岩的蠕变特征。组

[作者简介] 程艳晨(1998—),女,河南濮阳人,研究方向为岩石力学与地下工程。

[基金项目] 国家自然科学基金(42272329)

[引用格式] 程艳晨,孙林娜,张黎明,等.基于记忆依赖型导数的岩石黏弹塑性蠕变模型[J].中国矿山工程,2025,54(2):42-47.

合模型具有概念直观、物理意义明确等优点^[9],但不能很好地描述岩体非线性蠕变特性。随后,学者采用非线性蠕变元件代替线性蠕变元件,构建能描述岩石加速蠕变特征的非线性蠕变模型。李良权等^[10]将非线性黏塑性元件与西原模型串联,建立了一能刻画岩石蠕变全过程的非线性蠕变模型。王来贵^[11]建立了岩石全程应力-应变关系与蠕变方程参数的对应关系,提出了岩石参数非线性蠕变模型。金丰年等^[12]采用割线模量定义损伤变量,构建了岩石非线性蠕变损伤本构方程。非线性蠕变模型物理意义模糊,侧重于蠕变曲线的拟合程度,刻画岩体蠕变特征的时间依赖性方面能力不足^[13]。

岩石蠕变状态不仅取决于应力状态,还与应力历史有关^[14]。为此,学者采用具备历史依赖性和记忆效应的分数阶导数建立岩石蠕变模型^[15]。胡其志等^[16]将分数阶元件和弹簧元件串联,建立了能描述岩石蠕变全过程的蠕变模型。何志磊^[17]将分数阶元件替换西原模型中的牛顿元件,建立了新的蠕变模型描述大理岩的蠕变全过程。吴斐^[18]用分数阶黏壶元件代替牛顿流体黏滞阻尼元件,建立能描述盐岩加速蠕变特征的蠕变模型。

分数阶导数的核函数为固定函数,随着时间增长,其导致刻画的记忆效应会逐渐减弱^[19],不适合描述具有长时间变化的对象。Wang & Li 提出的记忆依赖型导数克服了分数阶导数核函数局限性的困扰,其依赖区间不会随时间增大^[20]。记忆依赖型导数在广义热弹性方程建模、广义磁热粘弹性理论模型研究中已得到初步应用^[21]。本文在记忆依赖型导数的框架内,构建了一个新的岩石黏弹塑性蠕变模型,并将其推广到三维空间。不同岩土体的蠕变试验数据验证表明,本文模型可以准确描述各类岩土体的蠕变全过程特性,拟合效果优于分数阶蠕变模型和黏弹塑性蠕变模型。

2 基于记忆依赖型导数的岩石蠕变模型

2.1 记忆依赖型导数定义

“记忆依赖型导数”在 Caputo 型导数基础上提出^[19],公式为

$$D_{\tau}^m f(t) = \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t k(s-t) f^{(m)}(s) ds \quad (1)$$

式中, $D_{\tau}^m f(t)$ 为 $f(t)$ 的 m 次可微函数,称为 m 阶记忆依赖型导数, $m \in N$; τ ($\tau > 0$) 是时滞,代表记

忆依赖时段的区间;核函数 K 是反映记忆效应的权重函数。

2.2 记忆依赖型黏壶

为了更好地刻画岩石全过程蠕变曲线,尤其是非线性加速蠕变阶段,就要求提出新的元件与塑性元件并联组成非线性黏塑性体。因此,本文基于记忆依赖型导数理论,构建岩石记忆依赖型黏壶,简称 M-D 黏壶,本构方程为

$$\sigma(t) = \eta_m \times \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t k_n(s-t) \dot{\varepsilon}(s) ds \quad (2)$$

式中, $\sigma(t)$ 为应力; $\varepsilon(t)$ 为蠕变变形; η_m 为岩石黏滞系数;权重函数 $k_n(s-t)$ 是一个 n 阶连续函数。选取权重函数为

$$k_n(s-t) = \left(\frac{s-t}{\tau} + 1 \right)^n \quad (3)$$

式中, $n \in N$ 。

将式(3)代入式(2)求得:

$$\dot{\varepsilon}(t) - \frac{n}{\tau} [\varepsilon(t) - 0^{n-1} \varepsilon(t-\tau)] = 0 \quad (4)$$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{\eta_m} e^{\frac{n}{\tau} t}, \quad (n \neq 0 \text{ 且 } n \neq 1) \quad (5)$$

定义记忆参数 $\omega = \frac{n}{\tau}$, 则 M-D 黏壶的蠕变方程为

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{\eta_{m1}} e^{\omega t} \quad (6)$$

式中, η_{m1} 为 M-D 黏壶的黏滞系数; ω_1 为 M-D 黏壶的记忆参数。

根据式(6),保持其他参数不变,仅改变记忆参数 ω , 可得不同记忆参数 ω 对应的 M-D 黏壶蠕变曲线^[22]如图 1 所示。不同记忆参数 ω 下, M-D 黏壶的应变曲线呈现非线性渐变特征。记忆参数 ω 越大, M-D 黏壶的非线性加速特征越明显,等速蠕变阶段时间越短,进入加速蠕变阶段的时间提前。

2.3 基于记忆依赖型导数的岩石一维黏弹塑性蠕变模型

岩石蠕变一般包括瞬时蠕变 ε_e 、等速蠕变 ε_{ve} 和加速蠕变 ε_{vp} 三阶段,基于记忆依赖型导数,建立岩石黏弹塑性蠕变模型如图 2 所示。岩石黏弹塑性模型的全过程蠕变曲线如图 3 所示。

岩石的总应变为^[23]

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_{ve} + \varepsilon_{vp} \quad (7)$$

虎克体的应力应变关系为

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E_0} \quad (8)$$

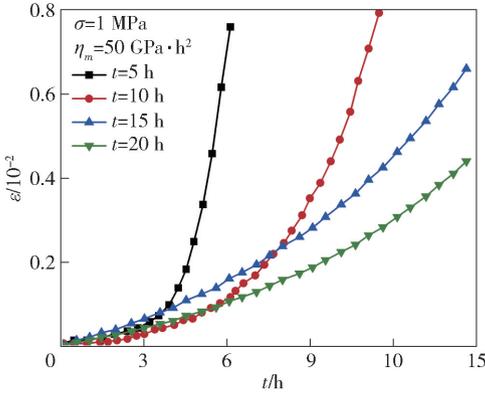


图1 M-D黏壶非线性蠕变变形曲线

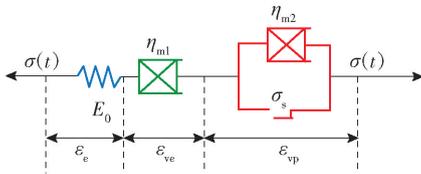


图2 记忆依赖型导数蠕变模型示意图

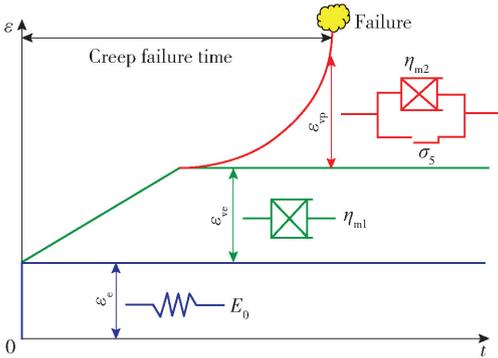


图3 典型岩土体蠕变曲线

式中, σ 为总应力; E_0 为虎克体的弹簧模量。

当 $\sigma \geq \sigma_s$, 岩土体进入加速蠕变阶段, M-D 黏壶与塑性体并联的黏塑性体应力应变关系为^[24]

$$\varepsilon_{vp} = \frac{\sigma - \sigma_s}{\eta_{m2}} e^{\omega_2 t} \quad (\sigma \geq \sigma_s) \quad (9)$$

式中, σ_s 为屈服应力; η_{m2} 为黏性系数; ω_2 为记忆参数。

综合考虑三部分应变, 建立最终建立岩石蠕变模型方程为

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{\sigma}{E_0} + \frac{\sigma}{\eta_{m1}} e^{\omega_1 t} & (\sigma < \sigma_s) \\ \varepsilon_{vp} = \frac{\sigma}{E_0} + \frac{\sigma}{\eta_{m1}} e^{\omega_1 t} + \frac{\sigma - \sigma_s}{\eta_{m2}} e^{\omega_2 t} & (\sigma \geq \sigma_s) \end{cases} \quad (10)$$

2.4 基于记忆依赖型导数的岩石三维黏弹塑性蠕变模型

三维应力状态下, 岩石总应变为^[25]

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^{ve} + \varepsilon_{ij}^{vp} \quad (11)$$

式中, ε_{ij}^e 为瞬时应变; ε_{ij}^{ve} 为等速应变; ε_{ij}^{vp} 为加速应变。

一般认为, 球应力张量对蠕变影响可忽略不计, 偏应力张量对蠕变过程起主要作用^[26]。根据广义胡克定律, 弹性体的三维本构方程为

$$\varepsilon_{ij}^e = \frac{S_{ij}}{2G_M} \quad (12)$$

式中, S_{ij} 为应力偏张量; G_M 为剪切模量。

M-D 黏壶的三维本构方程为^[27]

$$\varepsilon_{ij}^{ve} = \frac{S_{ij}}{2\eta_{m1}} e^{\omega_1 t} \quad (13)$$

根据岩石的黏弹塑性本构关系, 并结合式(9), 得到黏塑性体三维本构方程为

$$\varepsilon_{ij}^{vp} = \begin{cases} 0 & (\sigma < \sigma_s) \\ \frac{S_{ij} - \sigma_s}{2\eta_{m2}} e^{\omega_2 t} & (\sigma \geq \sigma_s) \end{cases} \quad (14)$$

将式(12)至式(14)和代入式(11), 得到三维状态下岩石蠕变方程:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} \frac{S_{ij}}{2G_M} + \frac{S_{ij}}{2\eta_{m1}} e^{\omega_1 t} & (\sigma < \sigma_s) \\ \frac{S_{ij}}{2G_M} + \frac{S_{ij}}{2\eta_{m1}} e^{\omega_1 t} + \frac{S_{ij} - \sigma_s}{2\eta_{m2}} e^{\omega_2 t} & (\sigma \geq \sigma_s) \end{cases} \quad (15)$$

3 蠕变模型验证

3.1 模型验证

采用软弱夹层岩的常规三轴分级剪切蠕变试验数据验证本文蠕变模型的准确性^[28], 拟合曲线如图4所示。其中, 模型参数采用 Levenberg-Marquardt 算法确定^[29], 具体见表1。不同法向应力下理论模型拟合的相关系数 R^2 均高于 0.93, 理论模型与试验数据吻合度较高。本文蠕变模型不仅能准确反映软弱夹层岩的瞬时蠕变和等速蠕变, 还可很好地刻画其非线性加速蠕变特性。

当 $\sigma < \sigma_s$ 时, 蠕变模型退化为两元件模型。软弱夹层岩受荷后, 胡克体描述岩石的瞬时弹性应变, 记忆依赖型黏壶描述呈衰减稳定特征的岩石蠕变试验曲线, 随时间增长变形逐渐稳定。当 $\sigma \geq \sigma_s$ 时, 蠕变模型为三元件模型, 软弱夹层岩受荷后产生瞬时变形, 较短时间内岩石蠕变速率达到稳定状态后,

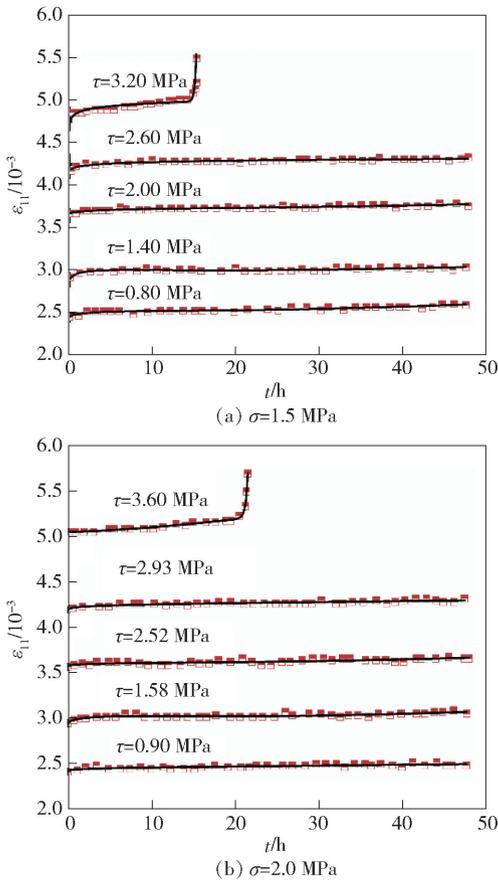


图4 模型拟合曲线

便进入非线性加速蠕变阶段,较好地反映了软弱夹层岩的蠕变全过程特征。

3.2 参数敏感性分析

3.2.1 M-D 黏壶的黏性系数 η_m

蠕变模型的其他参数不变,仅改变记忆依赖型黏壶的黏性系数 η_m ,得到不同黏性系数下的软弱夹层岩蠕变曲线图5。在岩石瞬时应变和等速蠕变阶段,蠕变速率与黏性系数 η_m 值无关;加速蠕变阶段,黏性系数 η_m 越小,蠕变曲线速率越大,非线性特征越明显,说明黏性系数 η_m 只影响岩石加速蠕变阶段特征。

3.2.2 M-D 黏壶的记忆参数

蠕变模型其他参数不变,仅改变 M-D 黏壶的记忆参数 ω ,得到不同微分阶次下的软弱夹层岩蠕变曲线,具体如图6所示。岩石的瞬时应变速率和等速蠕变阶段速率与记忆参数 ω 无关;记忆参数 ω 主要影响加速蠕变阶段的曲线形态。记忆参数 ω 越大,蠕变曲线速率越大,非线性特征越明显。此外,记忆参数 ω 越大,时滞 τ 越小,岩石进入加速蠕变阶段的时间提前,岩石更易破坏。

3.3 各类蠕变模型对比

黏土真三轴分级加载蠕变试验^[30]数据,对比

表1 蠕变模型参数

试样	S_{ij}/MPa	τ/MPa	G/GPa	$\eta_{m1}/\text{GPa}\cdot\text{h}$	ω_1	$\eta_{m2}/\text{GPa}\cdot\text{h}$	ω_2	R^2
S-I	1.5	0.80	0.33	0.933	15.24	—	—	0.936
	1.5	1.40	1.62	0.51	0.05	—	—	0.936
	1.5	2.00	0.38	0.66	0.00	—	—	0.948
	1.5	2.60	4.54	0.07	0.04	—	—	0.985
	1.5	3.20	13.65	0.00	13.73	30.74	5.32	0.956
S-II	2.0	0.90	2.34	34.79	12.55	—	—	0.935
	2.0	1.58	2.06	0.63	2.67	—	—	0.934
	2.0	2.52	5.65	0.75	2.61	—	—	0.931
	2.0	2.93	1.40	1.00	0.03	—	—	0.965
	2.0	3.60	8.20	0.00	27.34	3.67	12.88	0.990

黏弹性模型^[31]分数阶模型和本文模型的准确性,拟合结果如图7所示。线性黏弹性模型不能表征黏土的非线性渐变蠕变特征,理论曲线与试验数据误差较大。分数阶模型的拟合效果优于黏弹性模型,它可较好地刻画岩土体的减速蠕变和等速蠕变特征,无法准确刻画蠕变曲线的非线性加速特征,随时间增长理论曲线与试验数据偏差增大。本文模型不但可

准确描述黏土的瞬时变形和等速阶段蠕变,还能够准确刻画岩石非线性加速蠕变阶段特征,拟合精度明显优于线性黏弹性模型和分数阶模型。本文模型克服了黏弹性模型只能描述蠕变特征的弊端,弥补了分数阶模型不能准确表征非线性加速蠕变特征的缺陷,在表征岩石非线性加速蠕变特征方面更具优势。

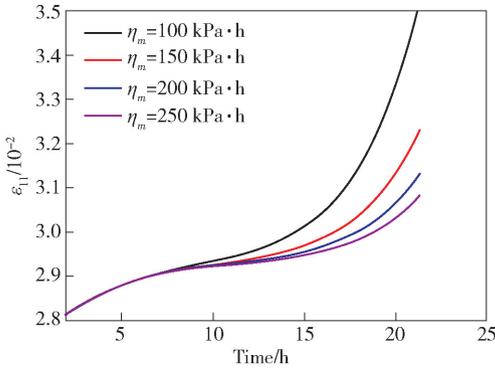


图5 黏性系数 η_m 的敏感性分析

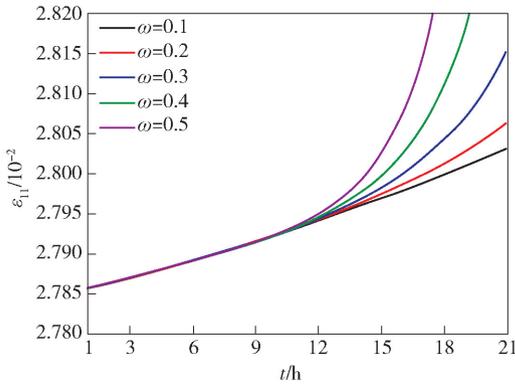


图6 记忆参数 ω 的敏感性分析

4 结论

(1) 本文在记忆依赖型导数理论框架内, 构建记忆依赖型黏壶, 提出了一个三元件记忆依赖型导数蠕变模型, 并推导了其在一维和三维应力状态下的蠕变方程。其中, 瞬时变形和等速蠕变分别由胡克体和记忆依赖型 M-D 黏壶描述, 塑性元件与记忆依赖型黏壶并联组成的黏塑性体刻画非线性加速阶段。

(2) 记忆依赖型导数蠕变模型的参数敏感性分析表明, 黏性系数 η_m 不影响岩石瞬时应变和等速蠕变阶段, 只影响岩石加速蠕变阶段特征。黏性系数 η_m 越小, 岩石非线性加速特征越明显。记忆参数 ω 主要影响岩石加速蠕变阶段的曲线形态, 记忆参数 ω 越大, 时滞越小, 岩土体非线性蠕变特征越明显。

(3) 采用三种岩土体的蠕变试验数据验证三种蠕变模型的适用性。记忆依赖型导数模型的准确性最好, 分数阶模型优于黏弹塑性模型。本文模型保留了黏弹塑性模型准确描述岩土体瞬时应变和等速蠕变的优点, 弥补了分数阶模型不能准确描述非线性

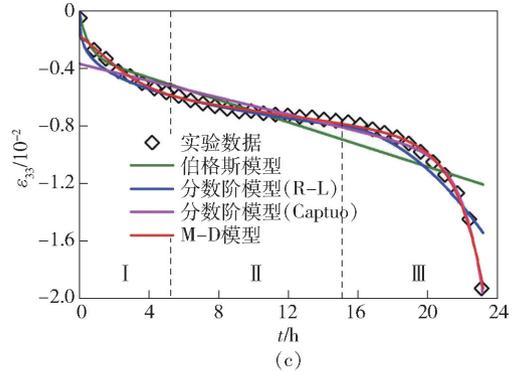
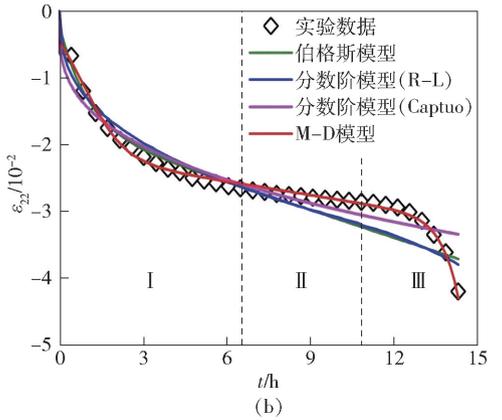
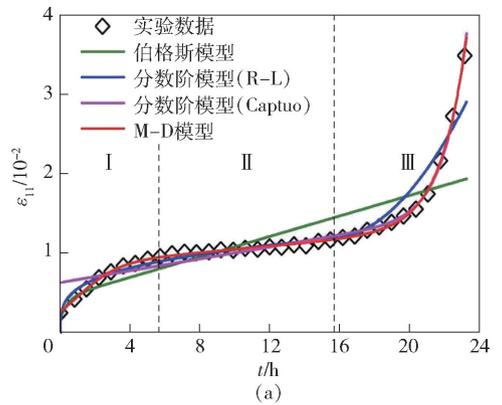


图7 模型对比分析

性加速蠕变特征的缺陷, 在刻画岩土体非线性加速蠕变特征方面更有优势。

[参考文献]

[1] 谢和平, 周宏伟, 薛东杰. 煤炭深部开采与极限开采的深度思考[J]. 煤炭学报, 2012, 37(4): 535-542.

[2] 浦海, 曹丽丽, 倪宏阳. 基于分数阶微积分的煤系砂岩渗流-蠕变模型研究[J]. 煤炭科学技术, 2018, 46(1): 45-08.

[3] 曹丽丽. 煤系砂岩渗流-蠕变损伤破裂机理及其分数阶模型[D]. 徐州: 中国矿业大学, 2017.

[4] 彭俊, 荣冠, 王小江, 等. 完整岩石 Hoek-Brown 屈服准则参数 m_i 的经验模型[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2013, 44(11): 461707.

- [5] 肖欣宏,王静,白志华,等. 真实水环境下红层软岩蠕变模型辨识与参数确定[J]. 水利与建筑工程学报, 2019,17(4):0082-06.
- [6] 孙钧. 地质材料的流变行为及其工程应用[M]. 北京: 中国建筑工业出版社,1999.
- [7] Hou Z. Mechanical and hydraulic behavior of salt in the excavation disturbed zone around underground facilities [J]. *Int J Rock Mech Mining Sci*, 2003,40(5): 725-38.
- [8] 姚兆明,李南,郭梦圆. 人工冻结黏土经验模型参数确定及蠕变规律验证[J]. 金属矿山, 2022, 557(11): 58-06.
- [9] 孙钧. 岩石流变力学及其工程应用研究的若干进展[J]. 岩石力学与工程学报, 2007,26(6): 1081-1106.
- [10] 徐卫亚,杨圣奇,褚伟江. 岩石非线性黏弹塑性流变模型(河海模型)及其应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2009, 41(5): 0671-10.
- [11] 王来贵,何峰,刘向峰,于永江. 岩石试件非线性蠕变模型及其稳定性分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2004,23(10):1640-03.
- [12] 金丰年,范华林. 岩石的非线性流变损伤模型及其应用研究[J]. 解放军理工大学学报, 2000,1(3):1-5.
- [13] Sun Y, Gao Y, Song S. Effect of integrating memory on the performance of the fractional plasticity model for geomaterials[J]. *Acta Mech. Sin.*, 2018, 34: 896-901.
- [14] 尹祥础. 固体力学[M]. 北京: 中国地震出版社, 2011.
- [15] 苏腾,周宏伟,赵家巍,等. 基于变阶分数阶导数的岩石蠕变模型[J]. 岩石力学与工程学报, 2019,38(7): 1355-09.
- [16] 胡其志,王芝超,丁志刚. 基于分数阶导数的岩石蠕变本构模型研究[J]. 河南理工大学学报(自然科学版), 2021,40(6):163-168.
- [17] 何志磊,朱珍德,朱明礼. 基于分数阶导数的非定常蠕变本构模型研究[J]. 岩土工程, 2016, 37(3): 0737-09.
- [18] 吴斐,刘建锋. 盐岩的分数阶非线性蠕变本构模型. 岩土力学, 2014,35(2):0162-06.
- [19] 孙雯雯. 记忆依赖型偏微分方程建模及其数值研究[D]. 青岛: 青岛理工大学,2018.
- [20] Wang J L, Li H F. Memory-dependent derivative versus fractional derivative (I): Difference in temporal modeling[J]. *J. Compute. Appl. Math.*, 2021, 384: 1-10.
- [21] Ezzat M A, El-Karamany A S, El-Bary A A. Modeling of memory-dependent derivative in generalized thermoelasticity [J]. *The European Physical Journal Plus*, 2016,372(131):1-12.
- [22] Zhang L M, Zhang D, Wang Z Q, et al. Constructing a three-dimensional creep model for rocks and soils based on memory-dependent derivatives: A theoretical and experimental study [J]. *Computers and Geotechnics*, 2023.
- [23] 周宏伟,王春萍,段志强,等. 基于分数阶导数的盐岩流变本构模型[J]. 中国科学, 2012, 42(3): 310-318.
- [24] 吴斐,谢和平. 分数阶黏弹塑性蠕变模型试验研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2014,33(5):964-07.
- [25] 齐亚静,姜清辉,王志俭. 改进西原模型的三维蠕变本构方程及其参数辨识[J]. 岩石力学与工程学报, 2012,31(2):347-355.
- [26] 苏腾,周宏伟,赵家巍,等. 基于变阶分数阶导数的岩石蠕变模型[J]. 岩石力学与工程学报, 2019,38(7): 1355-09.
- [27] 汪涛,荣传新,王彬. 基于 Burgers 三维损伤蠕变模型的巷道围岩流变特性分析[J]. 广西大学学报(自然科学版), 2017,42(1):205-09.
- [28] 曹建军,胡斌,王泽祺,等. 基于分数阶积分的软弱夹层蠕变损伤模型研究[J]. 岩土力学, 2024, 45(2): 454-12.
- [29] 胡浩. 基于分数阶微积分的岩石非线性蠕变本构模型研究及其在 Flac3D 中的二次开发[D]. 武汉: 中国地震局地震研究所, 2019.
- [30] 周瑞鹤,程桦. 三轴压缩分级卸荷条件下黏土蠕变特性及蠕变模型[J]. 岩石力学与工程学报, 2022, 41(6):1136-12.
- [31] 朱万成,唐春安. 岩石破裂过程分析用(RFPA2D)系统的细观单元本构关系及验证[J]. 岩石力学与工程学报, 2003,22(1):24-06.