

岩石长时效变形损伤过程的分数阶模型研究

Fractional Model Study on Deformation and Damage Process of Rock with Long Aging

肖书文(山西泽州天泰锦辰煤业有限公司, 山西 晋城 048000)

摘要:在深部环境中岩石长时间处于三维应力作用下会发生损伤与蠕变变形。为合理表征岩石蠕变变形过程,采用分数阶导数建模方式,将牛顿黏壶改进为分数阶黏壶,同时考虑到长时效过程中岩石的损伤演化状态,在物理参数中引入指数形式的损伤变量,建立了分数阶蠕变本构模型,并扩展为三维形式,最终利用砂岩实验数据进行了有效性验证。结果表明:砂岩蠕变实验具有明显的三阶段蠕变变形特征,建立的考虑损伤过程的分数阶蠕变模型具有较少的物理参数,能很好地描述处于深部三维应力环境中的岩石蠕变变形过程,验证了模型的有效性。

关键词:长时效变形;蠕变变形;分数阶导数;本构模型

中图分类号: TD325 **文献标志码:** A **文章编号:** 1672-609X(2023)04-0037-05

Abstract: In deep environment, rock damage and creep deformation will occur under three-dimensional stress for a long time. In order to reasonably characterize the creep deformation process of rock, a fractional derivative modeling method is adopted to improve the Newton clay pot into a fractional clay pot. At the same time, considering the damage evolution state of rock during the long aging process, exponential damage variables are introduced into the physical parameters. A fractional-order creep constitutive model is established and extended to three-dimensional form. Finally, the validity is verified by using the experimental data of sandstone. The results show that the creep experiment of sandstone has obvious three-stage creep deformation characteristics, and the established fractional-order creep model considering damage process has fewer physical parameters, which can well describe the creep deformation process of rock in deep three-dimensional stress environment, and verify the validity of the model.

Key words: long aging deformation; creep deformation; fractional derivative; constitutive model

1 前言

随着浅部煤矿资源开采殆尽,煤炭回采工作逐渐向深部迈进,深部巷道围岩长期处于高地应力的环境中会发生蠕变变形^[1-3],合理的表征巷道围岩在长时间作用下的力学变形行为,量化变形规律,对于深部煤矿安全开采具有重要作用。

传统的岩石蠕变本构理论模型主要包含2大类,分别是经验模型、组合元件模型。其中经验模型主要根据实验数据进行多项式拟合,利用对数函数、指数函数、幂函数等相似函数进行组合,在形式上表征岩石应变与时间的关系,然而此种模型的参数意

义不明确,普适性较低,不具备完整的理论力学基础^[4-5]。组合元件模型,主要通过弹性体(胡克体)、黏弹性体(牛顿黏性体)、黏塑性体(圣维南体)进行组合,建立蠕变本构模型。此种模型的物理含义更为明确,具有完备的理论依据,在此基础上冯夏庭等采用 Burgers 模型建立了考虑体积蠕变的本构模型。徐卫亚等在黏性元件与塑性元件并联组合的模型上引入了蠕变系数,再通过与五元件模型进行串联,得到了可以反映第三蠕变阶段的七元件模型^[6]。夏才初等构建了包含黏性、黏弹性、黏塑性、黏弹塑性的四元件蠕变模型^[7]。

为更好的表征岩石蠕变行为,现有的蠕变模型往往采取增加元件的方式进行优化,然而过多的元件将会导致本构方程的参数增加,大大降低了工程意义。同时,深部岩体通常处于三维应力状态,传统的单轴状态下的蠕变本构方程难以充分考虑三维应力环境。因此,综合考虑上述问题,采用分数阶导数

[作者简介] 肖书文(1980—),男,汉,山西晋城人,工程师,从事煤矿生产技术管理工作。

[引用格式] 肖书文. 岩石长时效变形损伤过程的分数阶模型研究[J]. 中国矿山工程,2023,52(4):37-41.

对蠕变元件模型进行改进,可以缩减本构方程的物理参数,同时构建三维的蠕变本构方程,并通过实验进行有效验证。

2 分数阶导数元件模型

2.1 分数阶导数定义

分数阶导数相比于整数阶导数的区别在于其导数阶次为分数,分数阶导数具有独立的数学定义方式,其中 Riemann-Liouville 微积分的定义方式最为广泛。设 f 在 $(0, +\infty)$ 上连续分布,并且在 $[0, +\infty]$ 的任何有限子区间可积,当 $t > 0$, $\text{Re}(\gamma) > 0$ 时,称式(1)为函数 $f(t)$ 的 γ 阶 Riemann-Liouville 分数阶积分。

$$\frac{d^{-\gamma}[f(t)]}{dt^{-\gamma}} = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^t (t-\xi)^{\gamma-1} f(\xi) d\xi \quad (1)$$

式中, $\Gamma(\gamma)$ 为 Gamma 函数。

通过对式(1)进行逆运算,则得到 Riemann-Liouville 分数阶导数,如式(2)所示。

$$\frac{d^{\gamma}[f(t)]}{dt^{\gamma}} = \frac{d^m}{dt^m} \left\{ \frac{d^{-v}[f(t)]}{dt^{-v}} \right\} \quad (2)$$

式中, m 是大于 γ 的最小整数。

根据分数阶导数的定义,将传统的整数阶导数蠕变元件模型进行优化,可得到分数阶导数蠕变元件模型。

2.2 分数阶导数蠕变元件模型

牛顿黏壶在组合元件模型中用来表示黏性变形,其本构方程如式(3)所示。

$$\sigma(t) = \eta^{\gamma} \frac{d^{\gamma}[\varepsilon(t)]}{dt^{\gamma}} \quad (0 \leq \gamma \leq 1) \quad (3)$$

式中, σ 为应力, MPa; η 为黏性系数; ε 为应变, %; t 为时间, h; γ 为导数的阶次。

根据 Riemann-Liouville 分数阶微积分算子理论可将牛顿黏壶变换为以时间为自变量的应变方程。

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{\eta^{\gamma} \Gamma(1+\gamma)} t^{\gamma} \quad (0 \leq \gamma \leq 1) \quad (4)$$

在岩石长时效蠕变的过程中,岩石在恒定应力的作用下内部微观结构会逐渐发生损伤,随着微观损伤的逐渐积累,内部微裂隙会聚合扩展为宏观裂缝,使岩石进入具有强时效特征的第三蠕变阶段,并最终破坏。为表征岩石的损伤积累过程,考虑将损伤变量引入到岩石的力学参数中,用于表示岩石力学参数的弱化过程,引入的损伤变量如式(5)所示。

$$\eta^{\gamma}(D) = \eta^{\gamma}(1-D) \quad (5)$$

式中, D 为损伤变量。考虑到损伤的积累是非线性的过程,因此,采用指数函数进行表示,如式(6)所示。

$$D = 1 - \exp(-\alpha t) \quad (6)$$

式中, α 为损伤劣化系数。

将式(3)、(5)、(6)进行联立,最终得到考虑损伤过程的分数阶导数牛顿黏壶本构方程如式(7)所示。

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{\eta^{\gamma} t^{\gamma}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^k}{\Gamma(k+1+\gamma)} \quad (7)$$

3 分数阶导数蠕变本构模型

3.1 Nishihara 蠕变本构模型

在岩石力学蠕变理论中,蠕变主要包含三个主要阶段,分别是第一蠕变阶段(初始蠕变阶段)、第二蠕变阶段(稳定蠕变阶段)、第三蠕变阶段(加速蠕变阶段),在蠕变过程中存在弹性变形、黏弹性变形、黏塑性变形以及损伤演化,可通过将元件模型进行组合得到相应的物理力学过程。日本学者提出的 Nishihara 蠕变模型被广泛用于描述第一蠕变阶段(初始蠕变阶段)、第二蠕变阶段(稳定蠕变阶段)。Nishihara 蠕变模型如图 1 所示,主要包括弹性体、黏弹性体与黏塑性体,其总应变表达式为

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_{ve} + \varepsilon_{vp} \quad (8)$$

式中, ε 为总应变, %; ε_e 为弹性应变, %; ε_{ve} 为黏弹性应变, %; ε_{vp} 为黏塑性应变, %。

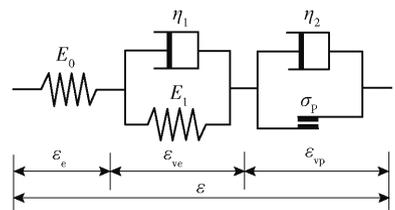


图 1 Nishihara 蠕变模型

3.2 分数阶蠕变本构方程

将 Nishihara 蠕变模型改进为分数阶 Nishihara 蠕变模型的方法是将模型中原有的牛顿黏壶替换为分数阶黏壶。

对图 2 所示的分数阶 Nishihara 蠕变模型的组合元件进行分析,推导其本构方程。对弹性体元件进行分析,其本构方程为

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E_0} \quad (9)$$

式中, E_0 为弹性体的弹性模量, GPa。

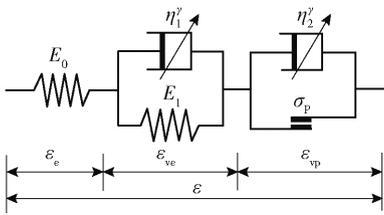


图2 分数阶 Nishihara 蠕变模型

对黏弹性体元件进行分析,其本构方程为

$$\frac{\sigma}{\eta_1^\gamma} = \frac{E_1}{\eta_1^\gamma} + \frac{d^\gamma(\varepsilon_{ve})}{dt^\gamma} \quad (10)$$

式中, E_1 为黏弹性体的弹性模量, GPa; η_1^γ 为黏弹性体分数阶黏壶的黏性系数。

在分数阶导数理论中,为便于计算将 Riemann-Liouville 导数转化为 Caputo 导数,两种导数具有的数学关系为:

$$\frac{d^\gamma[\gamma(t)]}{dt^\gamma} = \frac{{}^c d^\gamma[\gamma(t)]}{dt^\gamma} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\gamma} \gamma^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1-\gamma)} \quad (11)$$

当 $t=0$ 时, $\varepsilon_{ve} = 0$, 利用 Laplace 双重变换得到黏弹性体分数阶本构方程。

$$\varepsilon_{ve} = \frac{\sigma}{\eta_1^\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{E_1}{\eta_1^\gamma}\right)^k t^{\gamma(1+k)}}{\gamma(1+k)\Gamma[(k+1)+\gamma]} \quad (12)$$

对黏塑性体元件进行分析,黏塑性体中包含摩擦滑块,其主要物理意义在于表征应力阈值点,当应力大于阈值应力时,此元件启动,即代表当应力达到阈值应力时,岩石会发生具有长时效特征的第三蠕变阶段(加速蠕变阶段),摩擦滑块的公式为

$$\sigma_p = \begin{cases} \sigma, & \sigma < \sigma_s \\ \sigma_s, & \sigma \geq \sigma_s \end{cases} \quad (13)$$

式中, σ_p 为摩擦滑块应力, MPa; σ_s 为阈值应力, MPa。

考虑到蠕变第三阶段(加速蠕变阶段)的损伤演化趋势最为明显,因此,将损伤变量带入到黏塑性体元件中,经过 Laplace 双重变换得到黏塑性体的本构方程。

$$\varepsilon_{vp} = \begin{cases} 0, & \sigma < \sigma_s \\ \frac{\sigma - \sigma_s}{\eta_2^\gamma} t^\gamma \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^k}{\Gamma(k+1+\gamma)}, & \sigma \geq \sigma_s \end{cases} \quad (14)$$

式中, η_2^γ 为黏塑性体分数阶黏壶的黏性系数。

将上述弹性体元件、黏弹性体元件、黏塑性体元

件进行叠加,得到分数阶蠕变本构方程。

$$\begin{cases} \varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E_0} + \frac{\sigma}{\eta_1^\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{E_1}{\eta_1^\gamma}\right)^k t^{\gamma(1+k)}}{\gamma(1+k)\Gamma[(k+1)+\gamma]} & (\sigma < \sigma_s) \\ \varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E_0} + \frac{\sigma}{\eta_1^\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{E_1}{\eta_1^\gamma}\right)^k t^{\gamma(1+k)}}{\gamma(1+k)\Gamma[(k+1)+\gamma]} + \frac{\sigma - \sigma_s}{\eta_2^\gamma} t^\gamma \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^k}{\Gamma(k+1+\gamma)} & (\sigma \geq \sigma_s) \end{cases} \quad (15)$$

为简化表示式(15),在式中引入双参数 Mittag-Leffler 函数(式(16)),将式(15)变换为式(17)。

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (16)$$

式中, α, β 为函数参数; z 为函数自变量; k 为函数阶次。

$$\begin{cases} \varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E_0} + \frac{\sigma}{E_1} - \frac{\sigma}{E_1} E_{\gamma,1} \left(\frac{E_1}{\eta_1^\gamma} t^\gamma \right) & (\sigma < \sigma_s) \\ \varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E_0} + \frac{\sigma}{E_1} - \frac{\sigma}{E_1} E_{\gamma,1} \left(\frac{E_1}{\eta_1^\gamma} t^\gamma \right) + \frac{\sigma - \sigma_s}{\eta_2^\gamma} t^\gamma E_{1,1+\gamma}(\alpha t) & (\sigma > \sigma_s) \end{cases} \quad (17)$$

4 三维分数阶蠕变本构模型

深部岩石通常处于三维应力环境下,因此,忽略围压的本构方程往往不能有效地表征深部岩石地力学行为,三维应力环境下,蠕变的总应变为

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_{ij}^e(t) + \varepsilon_{ij}^{ve}(t) + \varepsilon_{ij}^{vp}(t) \quad (18)$$

根据广义胡克定律,将蠕变变形分解为偏应变与球应变,偏应变状态下的弹性体三维本构方程为

$$e_{ij} = \frac{1}{2G_0} s_{ij} \quad (19)$$

式中, e_{ij} 为应变偏张量, %; s_{ij} 为应力偏张量, MPa; G_0 为弹性体的剪切模量, GPa。

相应的,可得到偏应变状态下的黏弹性体三维本构方程为

$$\varepsilon_{ij}^{ve}(t) = \frac{s_{ij}}{2G_1} - \frac{s_{ij}}{2G_1} E_{\gamma,1} \left(-G_1 \frac{t^\gamma}{\eta_1^\gamma} \right) \quad (20)$$

式中, G_1 为黏弹性体的剪切模量, GPa。

黏塑性体中包含塑性变形部分,因此,在建立三维状态时,需要引入屈服函数,采用关联流动法则,黏塑性体三维本构方程为:

$$e_{ij}^{vp} = \frac{1}{2\eta_2^\gamma} \left\langle \varphi \left(\frac{F}{F_0} \right)^n \right\rangle \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} t^\gamma E_{1,1+\gamma}(\alpha t) \quad (21)$$

$$\left\langle \varphi \left(\frac{F}{F_0} \right) \right\rangle = \begin{cases} 0 & (F < 0) \\ \varphi \left(\frac{F}{F_0} \right) & (F \geq 0) \end{cases} \quad (22)$$

$$F = \sqrt{J_2} - \sigma_s / \sqrt{3} \quad (23)$$

式中, F 为屈服函数; F_0 为屈服函数参考值,取 1; φ 为幂函数,取 1; J_2 为应力偏量第二不变量。

假设两向围压 $\sigma_2 = \sigma_3$, 则得到以下条件:

$$\begin{cases} \sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + 2\sigma_3) \\ s_{11} = \sigma_1 - \sigma_m \\ s_{22} = \sigma_2 - \sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_3 - \sigma_1) \\ \sqrt{J_2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sqrt{3}} \end{cases} \quad (24)$$

将式(19)~(24)联立,最终得到偏应变状态下的三维分数阶蠕变本构方程:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}(t) = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{3G_0} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{3G_1} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{3G_1} E_{\gamma,1} \left(-G_1 \frac{t^\gamma}{\eta_1^\gamma} \right) \\ ((\sigma_1 - \sigma_3) < \sigma_s) \\ \varepsilon_{11}(t) = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{3G_0} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{3G_1} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{3G_1} E_{\gamma,1} \left(-G_1 \frac{t^\gamma}{\eta_1^\gamma} \right) + \\ \frac{\sigma_1 - \sigma_3 - \sigma_s}{6\eta_2^\gamma} t^\gamma E_{1,1+\gamma}(\alpha t) \\ ((\sigma_1 - \sigma_3) \geq \sigma_s) \end{cases} \quad (25)$$

同理,按照相同方式,可得到球应力状态下的三维分数阶蠕变本构方程:

$$\begin{cases} \varepsilon_{vol}(t) = \frac{\sigma_m}{K_0} + \frac{\sigma_m}{K_1} - \frac{\sigma_m}{K_1} E_{k,1} \left(-K_1 \frac{t^k}{\eta_{v1}^k} \right) \\ (F < 0) \\ \varepsilon_{vol}(t) = \frac{\sigma_m}{K_0} + \frac{\sigma_m}{K_1} - \frac{\sigma_m}{K_1} E_{k,1} \left(-K_1 \frac{t^k}{\eta_{v1}^k} \right) + \\ \frac{\sigma_1 - \sigma_3 - \sigma_s}{2\eta_{v2}^k} t^k E_{1,1+k}(\alpha t) \quad (F \geq 0) \end{cases} \quad (26)$$

式中, K_0 为弹性体中的体积模量, GPa; K_1 为黏弹性体中的体积模量, GPa; k 为体积蠕变分数阶导数; η_{v1}^γ 为黏弹性体中的黏性系数; η_{v2}^γ 为黏塑性体中的黏性系数。

将式(25)与式(26)合并最终可得到三维全应力状态下的分数阶蠕变本构模型如式(27)所示:

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}(t) = \left[\frac{\sigma_m}{3K_0} + \frac{\sigma_m}{3K_1} - \frac{\sigma_m}{3K_1} E_{k,1} \left(-K_1 \frac{t^k}{\eta_{v1}^k} \right) \right] \delta_{ij} + \\ \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{3G_0} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{3G_1} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{3G_1} E_{\gamma,1} \left(-G_1 \frac{t^\gamma}{\eta_1^\gamma} \right) \\ (F < 0) \\ \varepsilon_{ij}(t) = \left[\frac{\sigma_m}{3K_0} + \frac{\sigma_m}{3K_1} - \frac{\sigma_m}{3K_1} E_{k,1} \left(-K_1 \frac{t^k}{\eta_{v1}^k} \right) + \right. \\ \left. \frac{\sigma_1 - \sigma_3 - \sigma_s}{2\eta_{v2}^k} t^k E_{1,1+k}(\alpha t) \right] \delta_{ij} + \\ \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{3G_0} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{3G_1} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{3G_1} E_{\gamma,1} \left(-G_1 \frac{t^\gamma}{\eta_1^\gamma} \right) + \\ \frac{\sigma_1 - \sigma_3 - \sigma_s}{6\eta_2^\gamma} t^\gamma E_{1,1+\gamma}(\alpha t) \\ (F \geq 0) \end{cases} \quad (27)$$

式中, δ_{ij} 为狄利克雷函数。

5 岩石蠕变实验验证

5.1 岩石蠕变实验方案

为验证本文推导的三维分数阶本构方程,采用晋城市锦辰矿业 3 采区巷道砂岩进行常规三轴加载实验。实验采用 Rock Triaxial V4 三轴流变仪如图 3 所示。

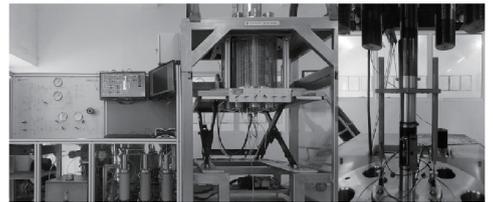


图 3 三轴流变仪

实验根据砂岩的赋存状态,同步加载围压与轴压,加载速度为 2.0 MPa/min,当加载到 20 MPa 时,保持围压不变,继续加载轴压直至达到 30 MPa,随后保持三向应力恒定,直至砂岩破坏。

5.2 岩石蠕变曲线拟合

蠕变实验共选取 3 个砂岩试样开展,将实验曲线与三维分数阶本构模型进行拟合,得到图 4 所示的拟合曲线。根据图中所示,砂岩的蠕变曲线表现出明显的三阶段蠕变变形。对比结果显示,推导的本构模型可以很好的描述深部砂岩的三轴蠕变实验数据,拟合参数见表 1。

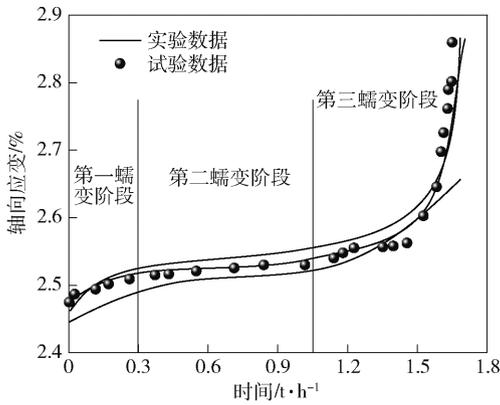


图4 三维分数阶本构模型与实验数据拟合曲线

表1 拟合参数表

$G_0/$ GPa	$G_1/$ GPa	$\eta_1^{\gamma}/$ GPa·h $^{\gamma}$	$\eta_2^{\gamma}/$ GPa·h $^{\gamma}$	γ	
7.18	9.50	232	10.2	0.03	
$K_0/$ GPa	$K_1/$ GPa	$\eta_{v1}^k/$ GPa·h $^{\gamma}$	$\eta_{v1}^k/$ GPa·h $^{\gamma}$	k	α/h^{-1}
6.56	9 750	52 400	116	0.64	3.72

6 结论

(1) 根据分数阶导数理论,将牛顿黏壶改进为分数阶黏壶,考虑到岩石内部的损伤演化,引入指数形式的损伤变量描述蠕变的第三阶段。通过改进 Nishihara 蠕变本构模型建立分数阶 Nishihara 蠕变本构模型。

(2) 考虑到深部岩石的三维应力状态,根据广义胡克定律,将分数阶 Nishihara 蠕变本构模型分解

为偏应力三维分数阶蠕变本构方程与球应力三维分数阶蠕变本构方程,最终建立全应力状态下的三维分数阶蠕变本构方程。

(3) 采用晋城市锦辰煤业 3 采区巷道砂岩进行常规三轴加载实验,实验数据具有明显的蠕变三阶段变形特征。推导的本构模型可以很好的描述深部砂岩的三轴蠕变实验数据,验证了模型的可靠性。

[参考文献]

[1] 张树光,刘文博,陈雷,等. 基于力学参数时效性的非正常蠕变模型[J]. 中国矿业大学学报,2019,48(5): 993 - 1002.

[2] 王路军,周宏伟,荣腾龙,等. 深部煤体非线性蠕变本构模型及实验研究[J]. 煤炭学报,2018,43(8): 2196 - 2203.

[3] 张向东,李永靖,张树光,等. 软岩蠕变理论及其工程应用[J]. 岩石力学与工程学报,2004,23(10):1635 - 1639.

[4] 谢和平,林柏泉,周宏伟,等. 深部煤与瓦斯共采理论与技术[M]. 北京:科学出版社,2017.

[5] Zheng Hong, Feng Xiating, Hao Xianjie. A creep model for weakly consolidated porous sandstone including volumetric creep [J]. International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences,2015,78:99 - 107.

[6] 徐卫亚,杨圣奇,褚卫江. 岩石非线性粘塑性流变模型(河海模型)及其应用[J]. 岩石力学与工程学报,2006,25(3):433 - 447.

[7] 夏才初,王晓东,许崇帮,等. 用统一流变力学模型理论辨识流变模型的方法和实例[J]. 岩石力学与工程学报,2008,27(8):1594 - 1600.